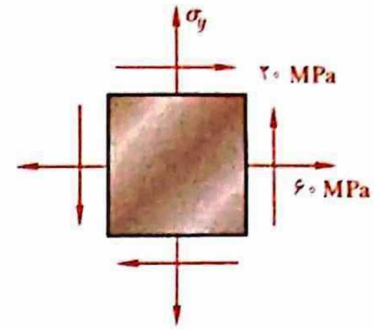
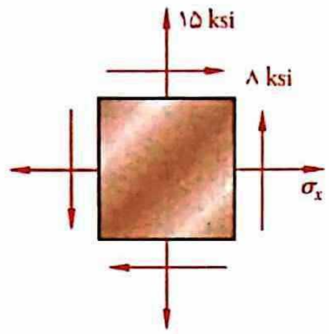
۷-۲۸ برای حالت تنش صفحه‌ای که در شکل می‌بینید، بزرگترین مقدار σ_y را به گونه‌ای تعیین کنید که بیشترین تنش برشی «در صفحه»، برابر یا کمتر از ۷۵ MPa شود.

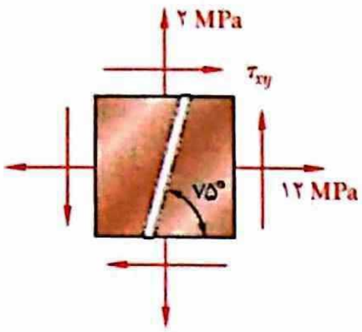


شکل مسئله ۷-۲۸

۷-۲۹ محدوده مقادیر σ_x را به گونه‌ای تعیین کنید که بیشترین تنش برشی «در صفحه»، برابر یا کمتر از ۱۰ ksi شود.



شکل مسئله ۷-۲۹



شکل مسئله ۷-۳۰

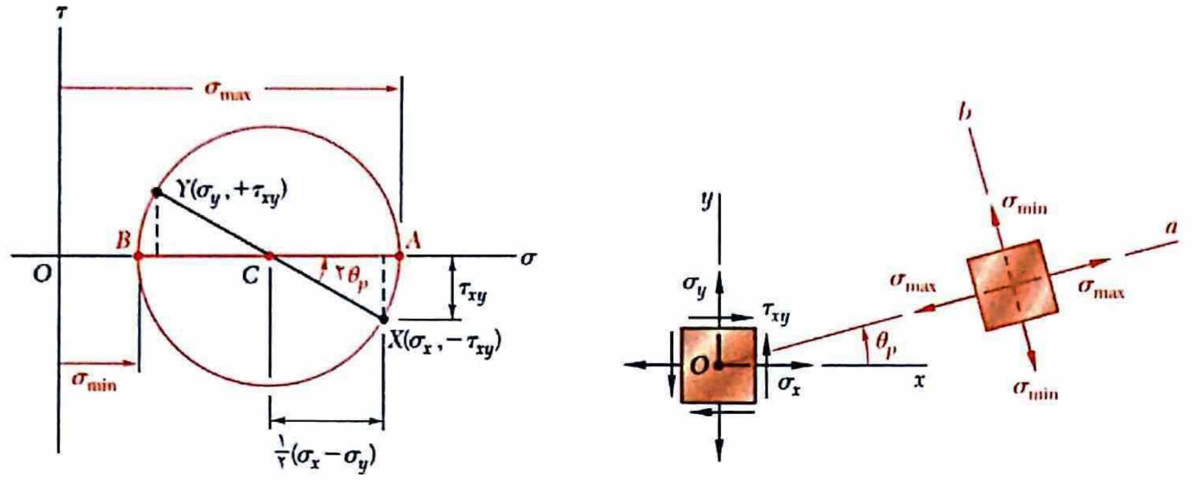
۷-۳۰ برای حالت تنش صفحه‌ای که در شکل می‌بینید، (الف) مقدار τ_{xy} را به گونه‌ای تعیین کنید که بیشترین تنش برشی «در صفحه» موازی با جوش برابر صفر شود، و (ب) تنشهای اصلی مربوطه را پیدا کنید.

۷-۴ دایره «مور» برای تنش صفحه‌ای

دایره‌ای که در بخش قبل برای بدست آوردن برخی از روابط اساسی مربوط به تبدیل تنش صفحه‌ای بکار بردیم، نخستین بار توسط مهندس آلمانی «اُتو مور»*(۱۹۱۸–۱۸۳۵) ارائه شد که به همین دلیل به دایره «مور» برای تنش صفحه‌ای موسوم است. همانگونه که خواهید دید، با استفاده از این دایره می‌توان روش دیگری برای حل مسائل مختلفی که در بخشهای ۷-۲ و ۷-۳ داشتیم بدست آورد. این روش براساس ملاحظات هندسی ساده استوار است و نیازمند استفاده از روابط خاص نیست. اگر چه این روش در ابتدا برای حل ترسیمی مسائل ابداع شد، اما با استفاده از یک ماشین حساب ساده نیز می‌توان به راحتی اینگونه مسائل را حل کرد.

یک جزء چهارگوش از ماده‌ای که تحت تنش صفحه‌ای قرار دارد را در نظر بگیرید (شکل ۷-۱۷الف). فرض می‌کنیم که σ_x، σ_y و τ_{xy} مؤلفه‌های تنش وارد به این جزء هستند. نقطه X با مختصات σ_x و $-\tau_{xy}$ و نقطه Y با مختصات σ_y و $+\tau_{xy}$ را رسم می‌کنیم (شکل ۷-۱۷ ب). اگر τ_{xy} همانگونه که در شکل ۷-۱۷ الف نشان داده شده است، مثبت باشد، نقطه X در زیر σ، و نقطه Y در بالای آن قرار خواهد داشت (شکل ۷-۱۷ ب). اگر τ_{xy} منفی باشد، X در بالای محور σ و Y در زیر آن قرار خواهد گرفت. اگر نقاط X و Y را توسط یک خط راست به هم متصل کنیم. نقطه برخورد C با محور σ را می‌توان به صورت مرکز دایره‌ای با قطر XY تعریف کرد. با توجه به اینکه مختصات طولی نقطه C و شعاع دایره به ترتیب برابر با مقادیر σ_{ave} و R در معادلات (۷-۱۰) هستند، نتیجه می‌گیریم که دایرهٔ بدست آمده همان دایره «مور» برای تنش صفحه‌ای است. بنابراین، مختصات طولی نقاط A و B که محل برخورد دایره با محور σ است به ترتیب نشانگر تنشهای اصلی $\sigma_{\max}$ و $\sigma_{\min}$ در نقطه مورد نظر است.

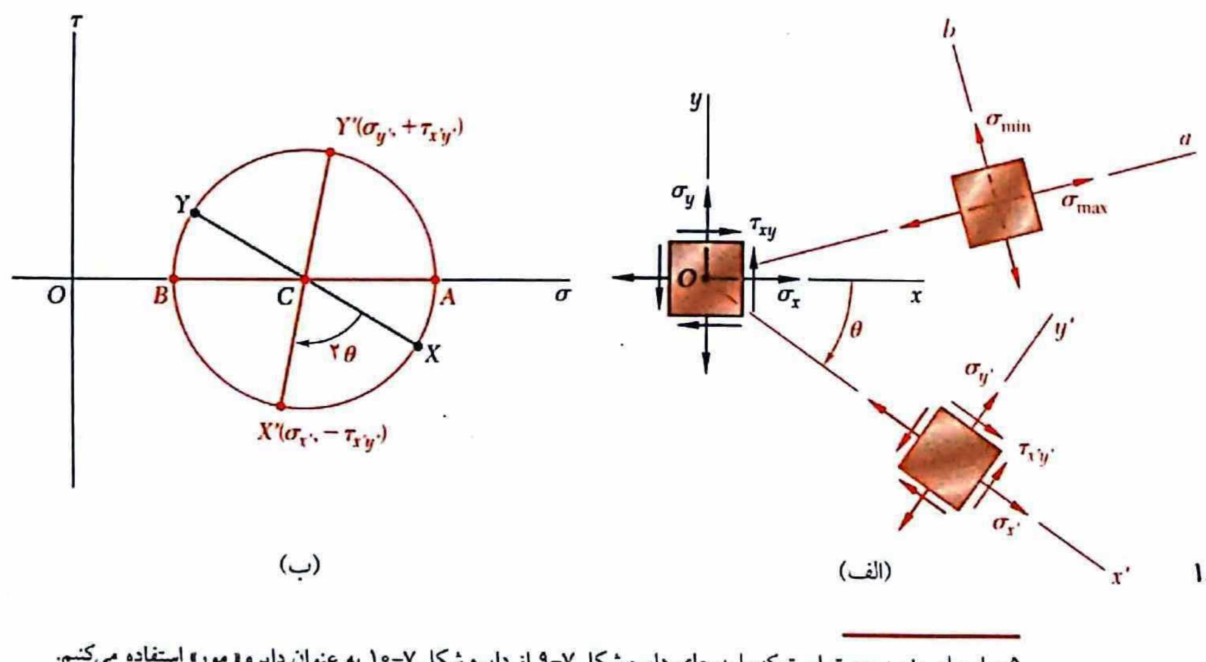
*Otto Mohr



شکل ۷–۱۷

از آنجا که $\tan (XCA) = ۲\tau_{xy}/(\sigma_x - \sigma_y)$ ، زاویه XCA از نظر مقدار برابر با یکی از زوایای $۲\theta_p$ است که معادله (۷–۱۲) را برقرار می‌کند. بنابراین، زاویه θ_p در شکل ۷–۱۷ الف که جهت صفحه اصلی متناظر با نقطه A در شکل ۷–۱۷ ب را تعیین می‌کند، می‌تواند از نصف کردن زاویه XCA بر روی دایره «مور» بدست آید. اگر مانند حالتی که در شکل می‌بینید، $\sigma_x > \sigma_y$ و $\tau_{xy} > ۰$ باشد، چرخشی که CX را به CA می‌آورد، خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. اما در این حالت، زاویه θ_p که از معادله (۷–۱۲) بدست می‌آید و جهت عمود Oa بر صفحه اصلی را تعیین می‌کند، مثبت است؛ بنابراین، چرخشی که Ox را به Oa می‌آورد نیز در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که جهت چرخش در هر دو بخش از شکل ۷–۱۷ یکسان است؛ اگر چرخش $۲\theta_p$ بر روی دایره «مور»، که CX را به CA می‌آورد، در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد، چرخش θ_p در شکل ۷–۱۷ الف نیز که Ox را به Oa می‌آورد، در خلاف عقربه‌های ساعت خواهد بود[5].

از آنجا که دایره «مور» یک دایره منحصر به فرد است، دایره مشابهی را می‌توان با در نظر گرفتن مؤلفه‌های تنش $\sigma_{x'}$ ، $\sigma_{y'}$ و $\tau_{x'y'}$ متناظر با محورهای x' و y' که در شکل ۷–۱۸ الف می‌بینید بدست آورد. بنابراین، نقطه X' با مختصات $\sigma_{x'}$ و $-\tau_{x'y'}$ ، و نقطه Y' با مختصات $\sigma_{y'}$ و $+\tau_{x'y'}$ بر روی دایره «مور» قرار خواهند داشت، و زاویه $X'CA$ در شکل ۷–۱۸ ب بایستی دو برابر زاویه $x'Oa$ در شکل ۷–۱۸ الف باشد. همانگونه که پیش از این نیز اشاره کردیم، چون زاویه XCA دو برابر زاویه

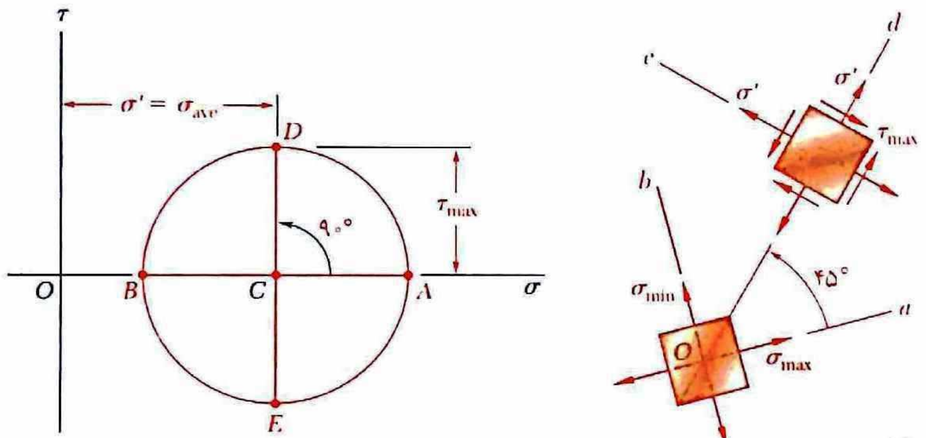


شکل ۷–۱۸

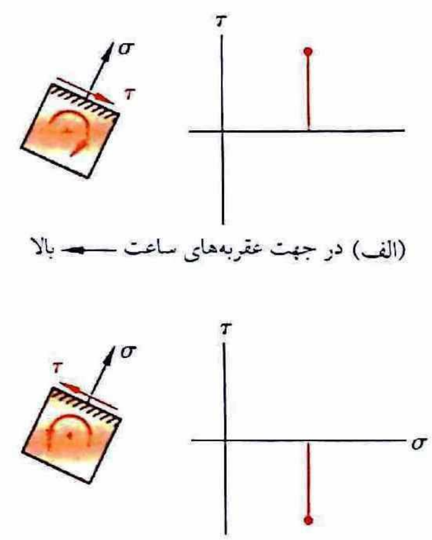
۵– این امر بدین جهت است که ما به جای دایره شکل ۷–۹ از دایره شکل ۷–۱۰ به عنوان دایره «مور» استفاده می‌کنیم.

xOa است، چنین برمی‌آید که زاویه XCX' در شکل ۷–۱۸ ب دو برابر زاویـه xOx' در شکـل ۷–۱۸ الف است. بنابراین، قطر $X'Y'$ که تعیین کننده تنشهای عمودی و برشی $\sigma_{x'}$، $\sigma_{y'}$ و $\tau_{x'y'}$ است را می‌توان با چرخش قطر XY بـه انـدازه 2θ کـه دو بـرابـر زاویـه بـین مـحورهای x و x' است (شکل ۷–۱۸ الف) بدست آورد. همانگونه که می‌بینید، چرخشی که قطر XY را به قـطر $X'Y'$ در شکل ۷–۱۸ ب می‌آورد دارای جهتی مشابه با چرخشی است که محورهای xy را به محورهای $x'y'$ در شکل ۷–۱۸ الف می‌برد.

ویژگی که هم‌اکنون بیان کردیم تأیید کننده این مطلب است که صفحات بیشترین تنش بـرشی، تحت زاویه °۴۵ نسبت به صفحات اصلی قرار دارند. به خاطر دارید که نقاط D و E بر روی دایره «مور» متناظر با صفحات بیشترین تنش برشی هستند، در حالی که نقاط A و B متناظر با صـفحات اصلی می‌باشند (شکل ۷–۱۹ ب). از آنجا که قطرهای AB و DE بر روی دایره «مور» تحت زاویه °۹۰ نسبت به یکدیگر قرار دارند، چنین برمی‌آید که وجوه جزءهای متناظر تحت زاویه °۴۵ نسـبت بـه یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۷–۱۹ الف).



(ب) (الف) شکل ۷–۱۹



(الف) در جهت عقربه‌های ساعت ← بالا

(ب) در خلاف جهت عقربه‌های ساعت ← پایین

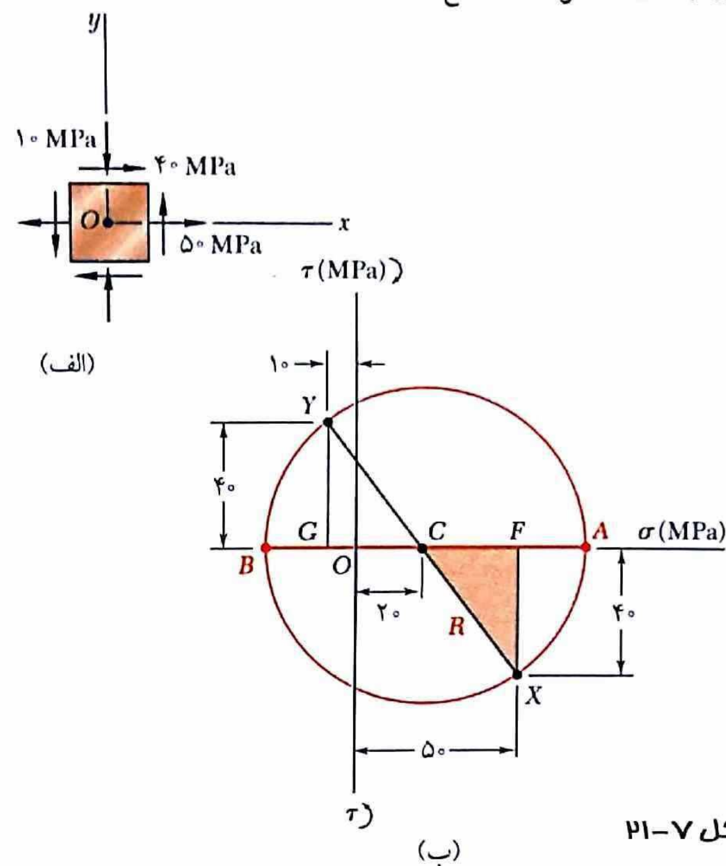
شکل ۷–۲۰

اگر هر وجه جزیی را که برای تعیین مؤلفه‌های تنش بکار برده‌ایم به طور جداگانه در نظر بگیریم، ترسیم دایره «مور» برای تنش صفحه‌ای بسیار ساده خواهد شد. از شکلهای ۷–۱۷ و ۷–۱۸ می‌بینید هنگامی کـه تـنش بـرشی وارد بـر یک وجه مشـخص از یک جـزء، تـمایل بـه چـرخـاندن آن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دارد، نقطه واقع بر دایره «مور» متناظر با این وجه در بالای محور σ قرار دارد. و برعکس، یعنی هنگامی که تنش بـرشی وارد بـه ایـن وجـه، تـمایل بـه چـرخش جـزء در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دارد، نقطه متناظر با این وجه در زیر محور σ قرار خواهد داشت (شکل ۷–۲۰). مادامی که تنشهای عمودی را مورد بررسی قرار می‌دهیم، قرارداد معمول مـا مـعتبر خواهد بود، یعنی تنش کششی را مثبت و به سمت راست در نظر می‌گیریم، حال آنکه، تنش فشاری را منفی و به سمت چپ در نظر خواهیم گرفت.

مثال ۷–۲

برای حالت تنش صفحه‌ای که در مثال ۷–۱ داشتیم، (الف) دایره «مور» را رسم کنید، (ب) تنشهای اصلی را تعیین کنید و (ج) بیشترین تنش برشی و تنش عمودی مربوط به آن را بدست آورید.

الف) رسم دایره «مور». در شکل ۷–۲۱ الف می‌بینید که تنش عمودی وارد بر وجهی که در امتداد عمود بر محور x قرار دارد، کشـشی (مـثبت) است و تنش برشی وارد بر این وجه تمایل به چرخش آن در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دارد. بنابراین، نقطه X از دایره «مور» در سـمت راست محور عمودی و در زیر محور افقی رسم خواهد شد (شکـل ۷–۲۱ ب). بررسی مشابهی برای تنش عمودی و تنش برشی وارد بر وجه بالایی ایـن جزء نشان می‌دهد که نقطه Y بایستی در سمت چپ محور عمودی و در بالای محور افقی رسم شود. با رسم XY، نقطه C مـرکز دایـره «مور» را بدست می‌آوریم.



شکل ۷–۲۱

مختصات طولی این نقطه برابر است با:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = \frac{۵۰ + (-۱۰)}{۲} = ۲۰ \text{ MPa}$$

از آنجا که طول اضلاع مثلث سایه‌خورده برابر است با:

$$CF = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰ \text{ MPa} \qquad \text{و} \qquad FX = ۴۰ \text{ MPa}$$

شعاع این دایره برابر خواهد بود با:

$$R = CX = \sqrt{(۳۰)^۲ + (۴۰)^۲} = ۵۰ \text{ MPa}$$

ب) صفحات اصلی و تنشهای اصلی. تنشهای اصلی برابرند با:

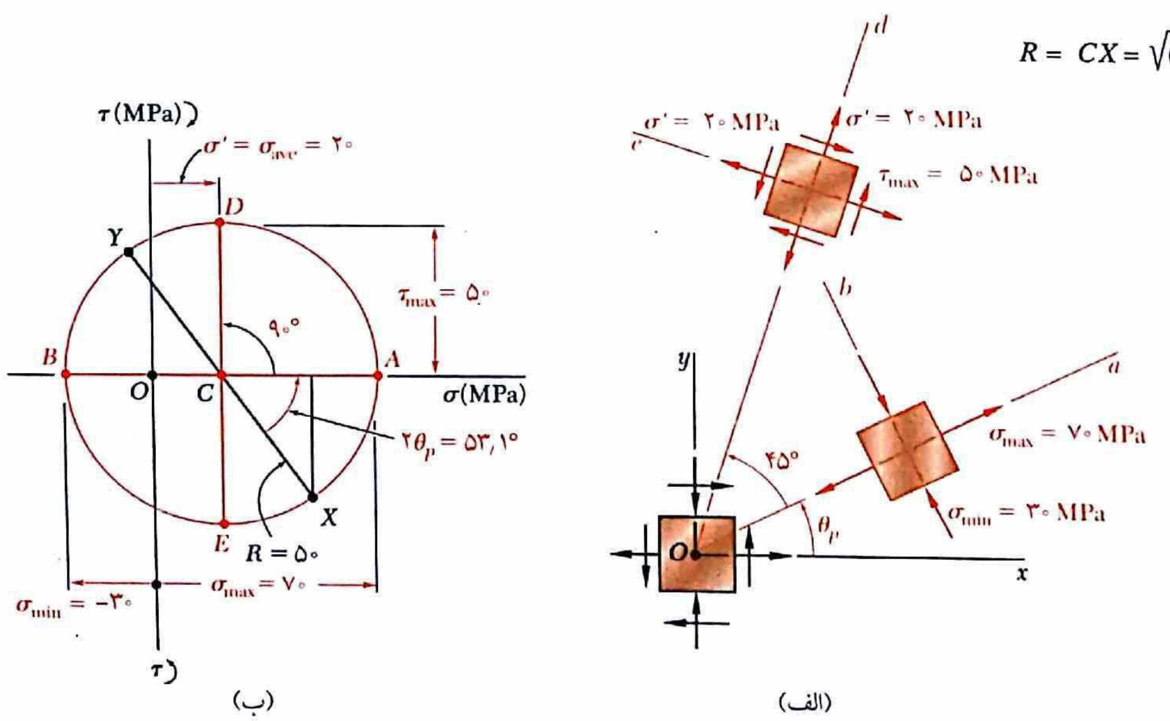
$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = ۲۰ + ۵۰ = ۷۰ \text{ MPa}$$
$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = ۲۰ - ۵۰ = -۳۰ \text{ MPa}$$

با توجه به اینکه زاویه ACX برابر با $۲\theta_p$ است (شکل ۷–۲۱ ب)، چنین می‌توان نوشت:

$$\tan ۲\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{۴۰}{۳۰}$$
$$۲\theta_p = ۵۳/۱° \qquad \theta_p = ۲۶/۶°$$

چون چرخشی که CX را به CA می‌آورد (شکل ۷–۲۲ ب) در خلاف جهت عقربه‌های ساعت است، چرخشی که Ox را به محور Oa متناظر با σ_{max} در شکل ۷–۲۲ الف می‌آورد نیز در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود.

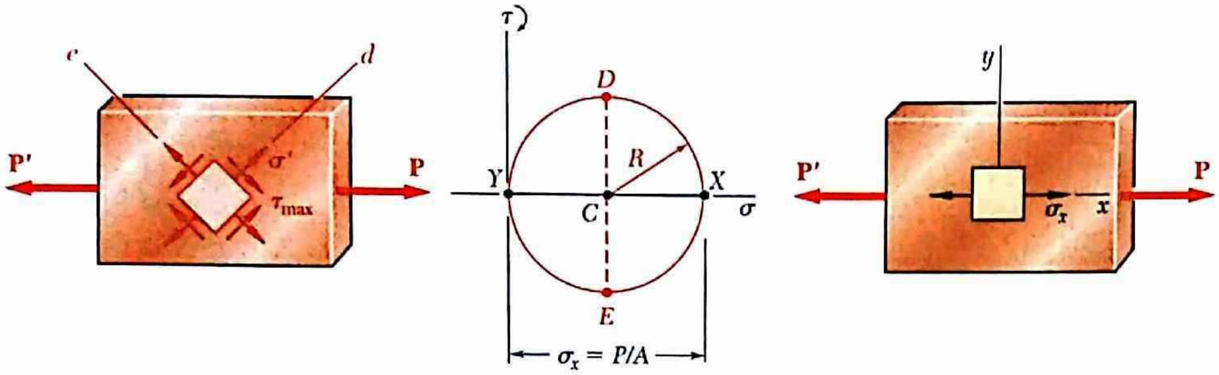
ج) بیشترین تنش برشی. از آنجا که چرخش بعدی به اندازه ۹۰° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، CA در شکل ۷–۲۲ ب را به CD می‌آورد، یک چرخش متعاقب به اندازه ۴۵° در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، محور Oa را به محور Od متناظر با بیشترین تنش برشی در شکل ۷–۲۲الف خواهد آورد. در شکل۷–۲۲ب می‌بینید که $\tau_{max} = R = ۵۰$ MPa و تنش عمودی متناظر با آن $\sigma' = \sigma_{ave} = ۲۰$ MPa است. از آنجا که نقطه D در بالای محور σ در شکل ۷–۲۲ ب قرار دارد، تنشهای برشی وارد بر وجه‌های عمود بر Od در شکل ۷–۲۲ الف بایستی در جهتی باشند که موجب چرخش جزء در جهت عقربه‌های ساعت شوند.



شکل ۷–۲۲

دایره «مور» روش مناسبی برای کنترل نتایجی که پیش از این برای تنشهای ناشی از بارهای محوری مرکزی (در بخش ۱-۱۲) و بارهای پیچشی (در بخش ۳-۴) بدست آوردیم فراهم می‌کند. در نخستین حالت (شکل ۷-۲۳ الف)، داریم $\sigma_x = P/A$ ، $\sigma_y = 0$ و $\tau_{xy} = 0$. نقاط متناظر با X و Y

شکل ۷-۲۳
دایره «مور» برای بارگذاری محوری مرکزی.



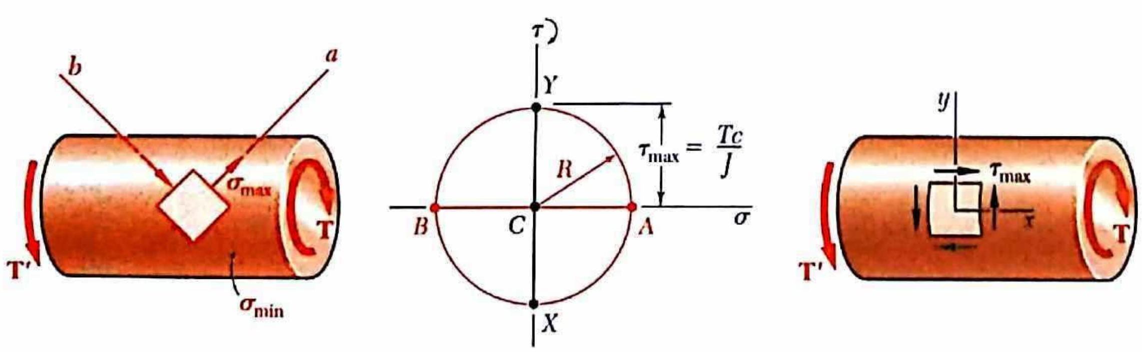
(ج) (ب) (الف)

دایره‌ای با شعاع $R = P/2A$ تعریف می‌کنند که از مبدأ مختصات می‌گذرد (شکل ۷-۲۳ ب). نقاط D و E علاوه بر جهت صفحات بیشترین تنش برشی (شکل ۷-۲۳ ج)، مقادیر τ_{max} و تنشهای عمودی متناظر σ' را نیز بدست می‌دهند:

$$\tau_{max} = \sigma' = R = \frac{P}{2A} \qquad (۷-۱۸)$$

در حالت بارهای پیچشی (شکل ۷-۲۴ الف)، داریم $\sigma_x = \sigma_y = 0$ و $\tau_{xy} = \tau_{max} = Tc/J$. بنابراین، نقاط X و Y بر روی محور τ واقعند، و دایره «مور» دایره‌ای است با شعاع $R = Tc/J$ که مرکز آن در

شکل ۷-۲۴
دایره «مور» برای بارگذاری پیچشی.



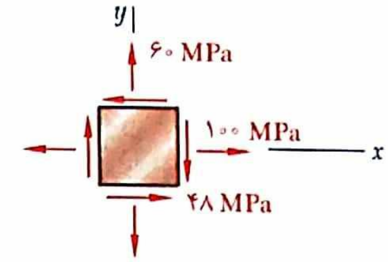
(ج) (ب) (الف)

مبدأ مختصات قرار دارد (شکل ۷-۲۴ ب). نقاط A و B، صفحات اصلی (شکل ۷-۲۴ ج) و تنشهای اصلی را تعیین می‌کنند:

$$\sigma_{max,\,min} = \pm R = \pm \frac{Tc}{J} \qquad (۷-۱۹)$$

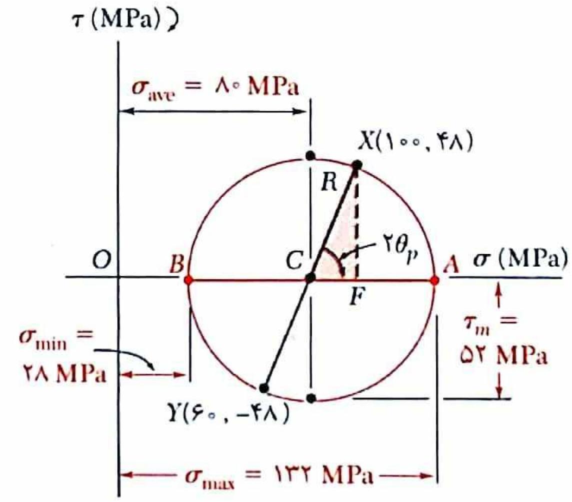
مسئله نمونه ۷-۲

برای حالت تنش صفحه‌ای که در شکل می‌بینید، (الف) صفحات اصلی و تنشهای اصلی را تعیین کنید، و (ب) مؤلفه‌های تنش وارد به این جزء را که در اثر چرخش آن به اندازه °۳۰ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید محاسبه نمایید.



حل:

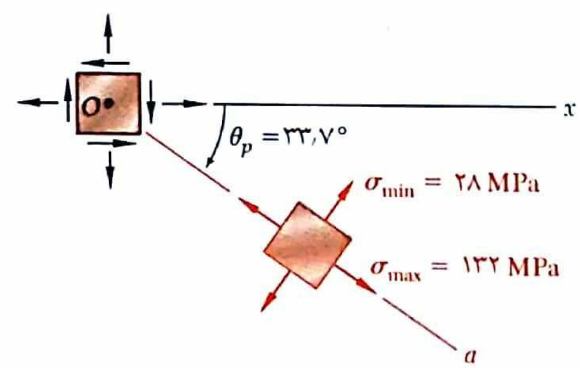
رسم دایره «مور». توجه دارید که تنش عمودی وارد به وجه عمود بر محور x، کششی است و تنش برشی تمایل به چرخش جزء در جهت عقربه‌های ساعت دارد. بنابراین، نقطه X را در سمت راست محورهای عمودی به طول ۱۰۰ واحد و بالای محور افقی به عرض ۴۸ واحد رسم می‌کنیم. به همین روش، با بررسی مؤلفه‌های تنش وارد بر وجه بالایی، نقطه $Y(۶۰\,,-۴۸)$ را رسم می‌کنیم. با اتصال نقاط X و Y توسط یک خط راست، مرکز دایره «مور» C را پیدا می‌کنیم. طول نقطه C که نشانگر σ_{ave} است، و شعاع R را می‌توان با اندازه‌گیری مستقیم از روی شکل به صورت زیر بدست آورد:



$$\sigma_{ave} = OC = \tfrac{1}{۲}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{1}{۲}(۱۰۰ + ۶۰) = ۸۰ \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{(CF)^۲ + (FX)^۲} = \sqrt{(۲۰)^۲ + (۴۸)^۲} = ۵۲ \text{ MPa}$$

الف) صفحات اصلی و تنشهای اصلی. قطر XY را به اندازه $۲\theta_p$ در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم تا بر قطر AB منطبق شود. بنابراین:



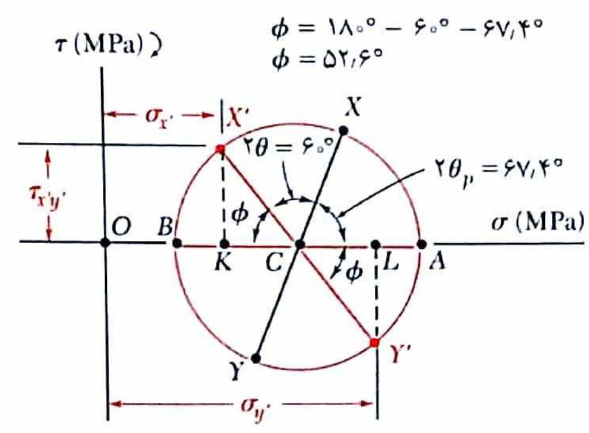
$$\tan ۲\theta_p = \frac{XF}{CF} = \frac{۴۸}{۲۰} = ۲{,}۴ \qquad ۲\theta_p = ۶۷{,}۴° \circlearrowright \qquad \blacktriangleleft\ \theta_p = ۳۳{,}۷° \circlearrowright$$

تنشهای اصلی برابر با طول نقاط A و B هستند:

$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = ۸۰ + ۵۲ \qquad \blacktriangleleft\ \sigma_{max} = +۱۳۲ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = ۸۰ - ۵۲ \qquad \blacktriangleleft\ \sigma_{min} = +۲۸ \text{ MPa}$$

چون چرخشی که XY را به AB می‌آورد در جهت عقربه‌های ساعت است، چرخشی که Ox را به محور Oa متناظر با σ_{max} می‌آورد نیز در جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود. جهتی را که در شکل می‌بینید برای صفحات اصلی بدست می‌آوریم.



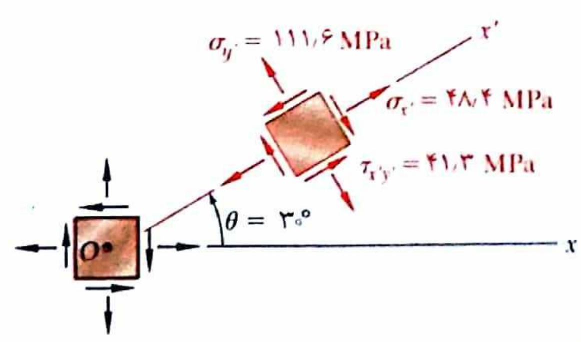
ب) مؤلفه‌های تنش وارد به جزیی با زاویه چرخش °۳۰. نقاط X' و Y' بر روی دایره «مور» که متناظر با مؤلفه‌های تنش وارد به جزء چرخیده هستند از چرخش XY به اندازه $۲\theta = ۶۰°$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت بدست می‌آید. بنابراین:

$$\phi = ۱۸۰° - ۶۰° - ۶۷{,}۴° \qquad \blacktriangleleft\ \phi = ۵۲{,}۶°$$

$$\sigma_{x'} = OK = OC - KC = ۸۰ - ۵۲\cos ۵۲{,}۶° \qquad \blacktriangleleft\ \sigma_{x'} = +\ ۴۸{,}۴ \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = OL = OC + CL = ۸۰ + ۵۲\cos ۵۲{,}۶° \qquad \blacktriangleleft\ \sigma_{y'} = +۱۱۱{,}۶ \text{ MPa}$$

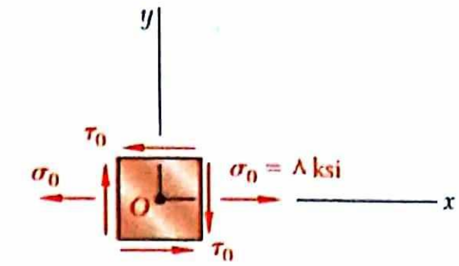
$$\tau_{x'y'} = KX' = ۵۲\sin ۵۲{,}۶° \qquad \blacktriangleleft\ \tau_{x'y'} = ۴۱{,}۳ \text{ MPa}$$



از آنجا که X' در بالای محور افقی قرار دارد، تنش برشی وارد به وجه عمود بر Ox' تمایل به چرخش جزء در جهت عقربه‌های ساعت خواهد داشت.

مسئله نمونه ۷ ـ ۳

یک حالت تنش صفحه‌ای شامل تنش کششی $\sigma_\circ = ۸$ ksi وارد به سطوح عمودی و تنشهای برشی نامعلوم است. (الف) مقدار تنش برشی $\tau_\circ$ را به گونه‌ای تعیین کنید که بیشترین تنش عمودی برابر ۱۰ ksi شود، و (ب) بیشترین تنش برشی متناظر را بدست آورید.

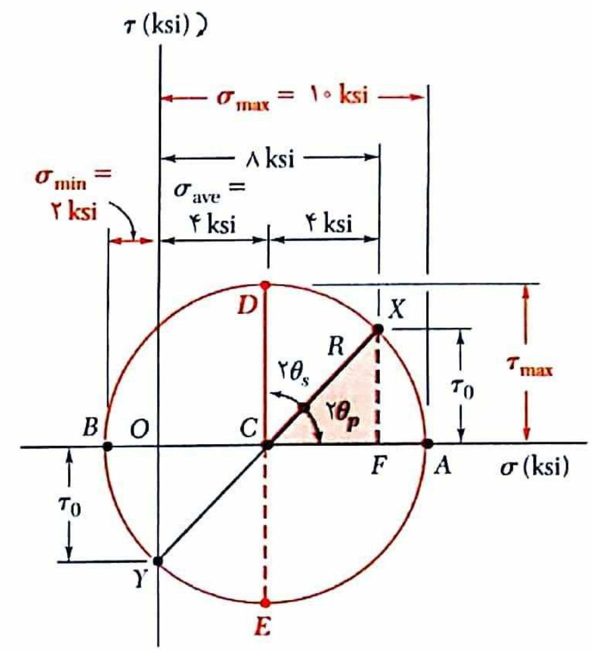


حل:

رسم دایره «مور». فرض می‌کنیم که جهت تنشهای برشی به گونه‌ای باشد که در شکل می‌بینید. بنابراین، تنش برشی $\tau_\circ$ بر روی وجه عمود بر محور x تمایل به چرخش جزء در جهت عقربه‌های ساعت دارد، و نقطه X را با مختصات ۸ ksi و $\tau_\circ$ در بالای محور افقی رسم می‌کنیم. با در نظر گرفتن وجه افقی این جزء می‌بینیم که $\sigma_y = \circ$ و $\tau_\circ$ تمایل به چرخش جزء در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دارد. بنابراین، نقطه Y را در فاصله $\tau_\circ$ در زیر O رسم می‌کنیم.

توجه کنید که مختصات طولی مرکز دایره «مور» C برابر است با:

$$\sigma_{ave} = \tfrac{۱}{۲}(\sigma_x + \sigma_y) = \tfrac{۱}{۲}(۸ + \circ) = ۴ \text{ ksi}$$



با توجه به اینکه بیشترین تنش عمودی $\sigma_{max} = ۱۰$ ksi با مختصات نقطه A مشخص می‌شود، می توان چنین نوشت:

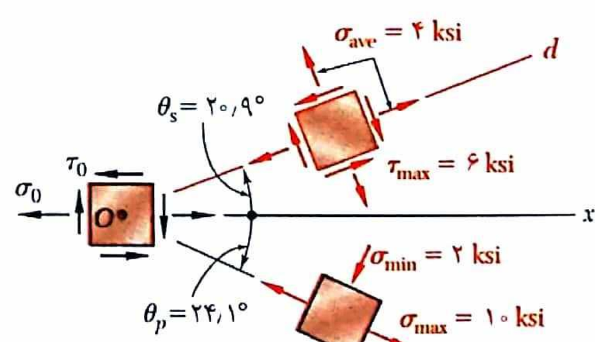
$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R$$

$$۱۰ \text{ ksi} = ۴ \text{ ksi} + R \qquad R = ۶ \text{ ksi}$$

الف) تنش برشی $\tau_\circ$. با در نظر گرفتن مثلث قائم‌الزاویه CFX، چنین خواهیم داشت:

$$\cos ۲\theta_p = \frac{CF}{CX} = \frac{CF}{R} = \frac{۴ \text{ ksi}}{۶ \text{ ksi}} \qquad ۲\theta_p = ۴۸{,}۲° \qquad \theta_p = ۲۴{,}۱°$$

$$\tau_\circ = FX = R \sin ۲\theta_p = (۶ \text{ ksi}) \sin ۴۸{,}۲° \qquad \tau_\circ = ۴{,}۴۷ \text{ ksi}$$



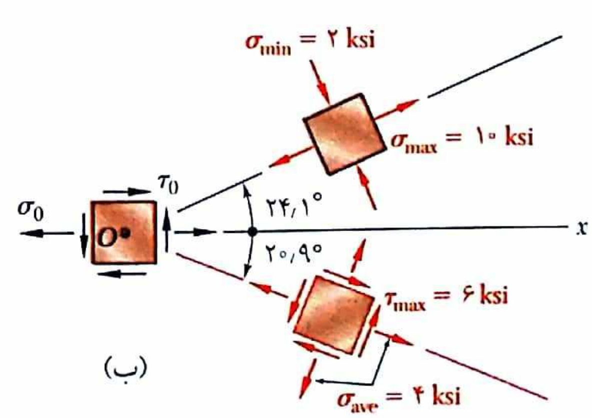
(الف)

ب) بیشترین تنش برشی. مختصات نقطه D از دایره «مور» بیانگر بیشترین تنش برشی و تنش عمودی متناظر است.

$$\tau_{max} = R = ۶ \text{ ksi} \qquad \tau_{max} = ۶ \text{ ksi}$$

$$۲\theta_s = ۹۰° - ۲\theta_p = ۹۰° - ۴۸{,}۲° = ۴۱{,}۸° \qquad \theta_x = ۲۰{,}۹°$$

بیشترین تنش برشی بر جزیی وارد می‌شود که جهت‌گیری آن را در شکل (الف) می‌بینید. (جزیی که تنشهای اصلی به آن وارد می‌شوند نیز نشان داده شده است).



(ب)

توجه: اگر فرض اولیه ما در خصوص جهت $\tau_\circ$ برعکس بود، بایستی دایره‌ای یکسان و پاسخهای مشابهی بدست می‌آوردیم، اما جهت جزءها به گونه‌ایست که در شکل (ب) می‌بینید.